



Matematikai függvények vizualizálása az oktatásban

Bc. Norbert Annuš

2020

A munka célja

- A munka célja, egy olyan szoftver elkészítése volt, amely a számításokon kívül grafikusán is ábrázolja az egyes függvényekben felvett értékeket és így szemléltetéssel jól alkalmazható oktatás céljából.
- A dolgozat során az *elemi függvényekkel, polinomfüggvényekkel, nevezetes multiplikatív számelméleti függvényekkel, a legkisebb négyzetek módszerével* valamint grafikában alkalmazott *interpolációs és approximációs* görbék vizuális ábrázolásával foglalkoztunk.

A programozási nyelvről

➤ Lazarus

- Ingyenes
- Objektum orientált
- Oktatásban alkalmazott





Elemi függvények

Elemi függvények ábrázolása

- Elemi függvénynek nevezünk minden olyan függvényt, amely az

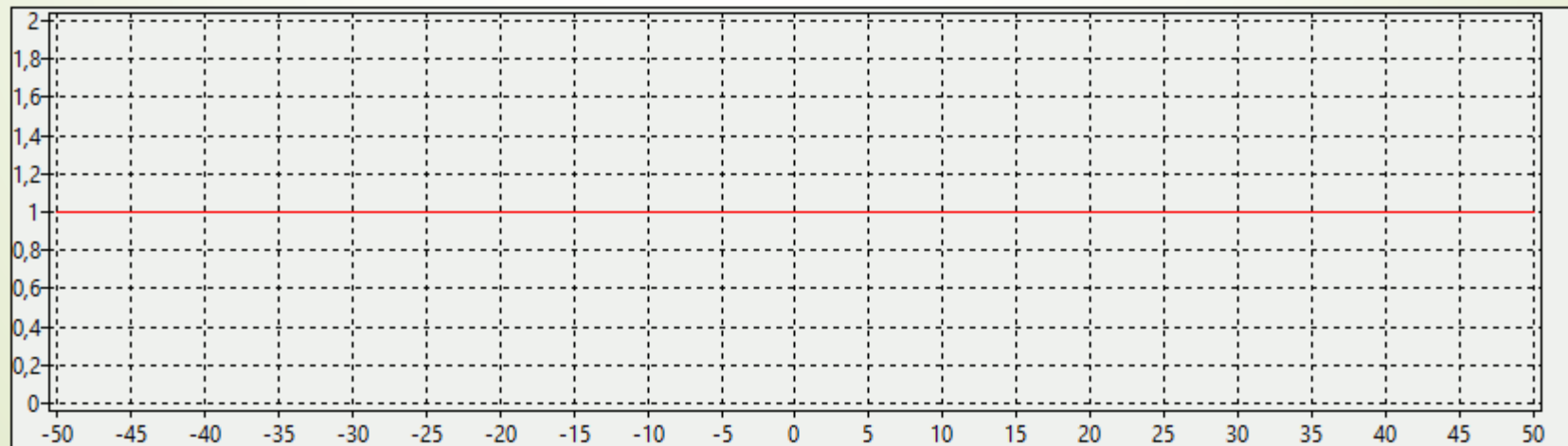
$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = e^x$$

függvényekből véges sok összeadással, szorzással, osztással állandóval való szorzással, inverz képzéssel és összetett függvény képzéssel állítható elő

- A munka során pár nevezetes elemi függvénnyel dolgoztunk, melyek ábrázoltatásához a felhasználónak lehetősége nyílik megadni:
 - X értékek intervalluma $\{-100, 100\}$
 - Együtthatók

Elemi függvények ábrázolása

- Konstans függvény - $f(x) = c$
- Elsőfokú függvény - $f(x) = a * x + b$
- Másodfokú függvény - $f(x) = x^2$
- Harmadfokú függvény - $f(x) = x^3$
- Gyök függvény - $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
- Abszolútérték-függvény - $f(x) = |x|$
- Lineáris törtfüggvény - $f(x) = \frac{1}{x}$
- Exponenciális függvény - $f(x) = a^x$
- Logaritmus függvény - $f(x) = \log_a x$





Polinomfüggvények

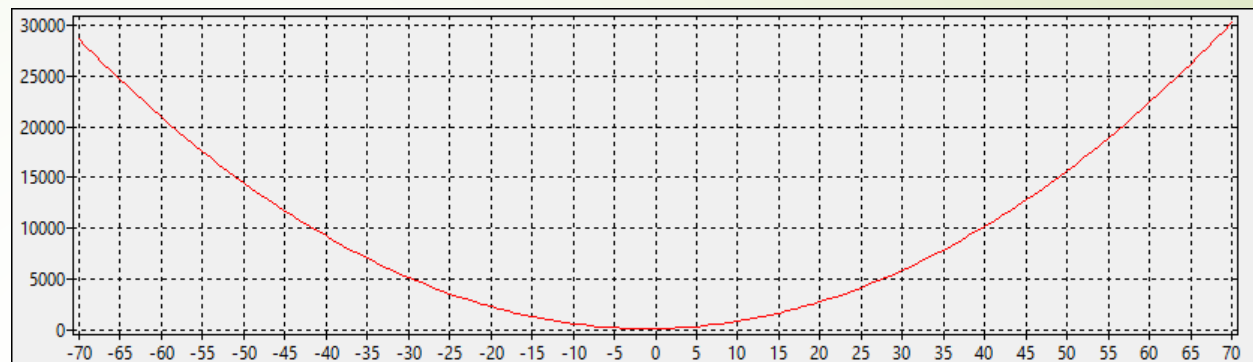
Polinomfüggvények

- A polinomok olyan többtagú kifejezések, amelyekben minden tag számok és változók nemnegatív, egész kitevőjű hatványainak szorzata.
- A munka során a másodfokú, harmadfokú és negyedfokú polinomok számítására és ábrázolására koncentráltunk.
- Amit a felhasználó megadhat:
 - X értékek intervalluma $\{-100, 100\}$
 - Együtthatók

Polinomfüggvények ábrázolása

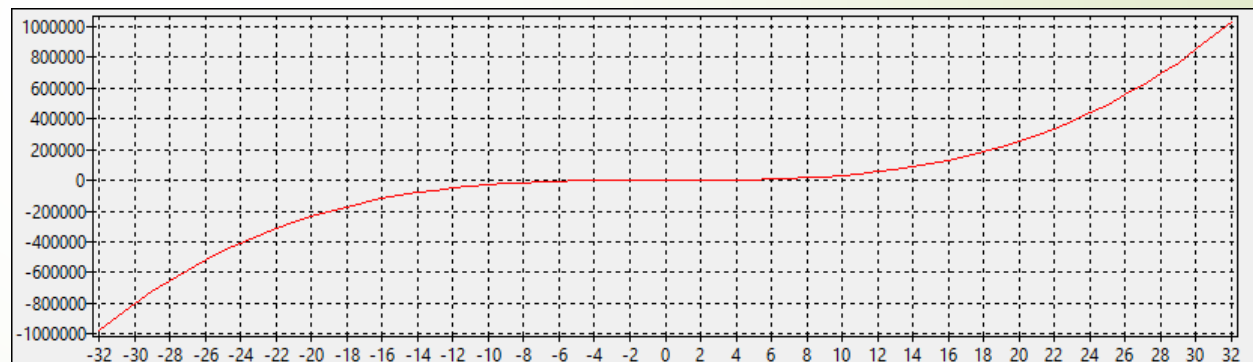
Másodfokú polinomfüggvény

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{ahol } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$



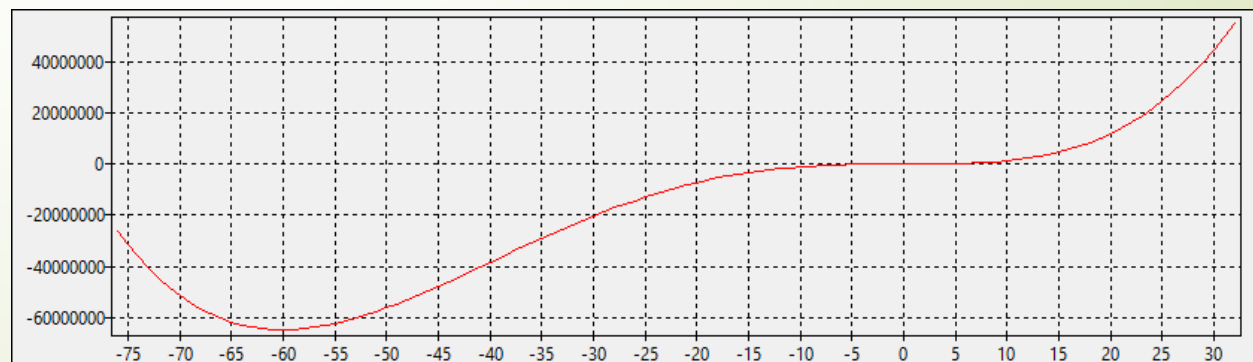
Harmadfokú polinomfüggvény

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{ahol } a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$$



Negyedfokú polinomfüggvény

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{ahol } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0$$





Nevezetes multiplikatív számelméleti függvények

$\tau(n), \sigma(n), \varphi(n), \mu(n)$

Multiplikatív számelméleti függvények

- Az olyan függvényeket nevezzük *számelméleti függvényeknek* amelyek az $\mathbb{N}$ halmazon vannak értelmezve
- Az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ számelméleti függvényt *multiplikatívnak* nevezzük, ha

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : \gcd(a, b) = 1 \text{ és } f(a * b) = f(a) * f(b)$$

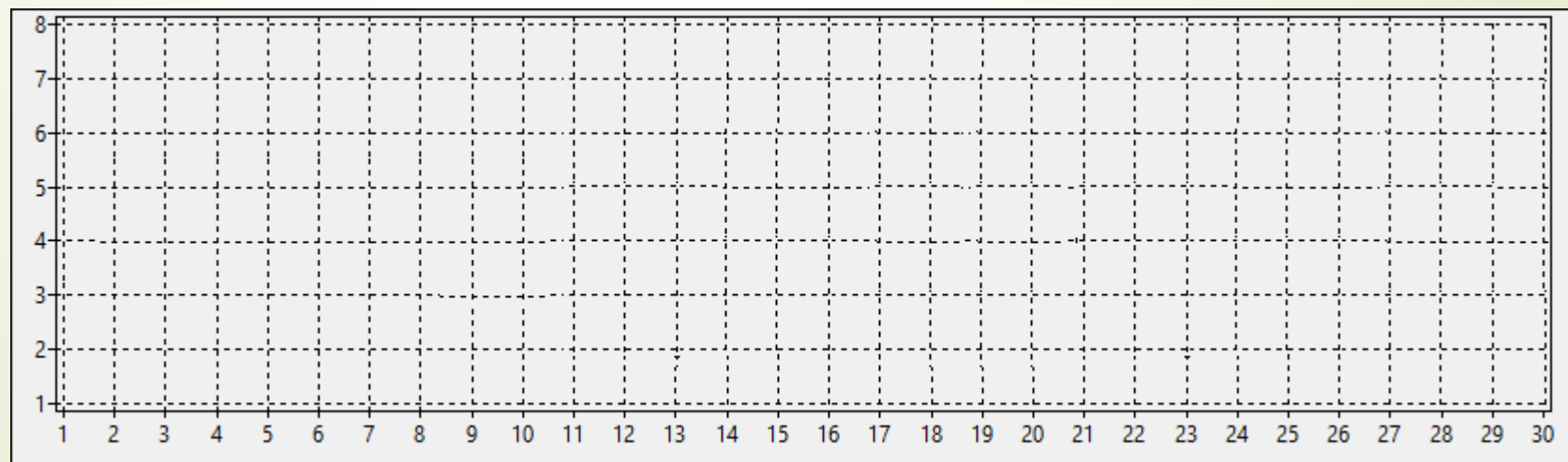
- Az alábbi multiplikatív számelméleti függvényekkel dolgoztunk:
 - $\tau(n)$, *Osztószám – függvény*
 - $\sigma(n)$, *Osztóösszeg – függvény*
 - $\varphi(n)$, *Euler – függvény*
 - $\mu(n)$, *Möbius – függvény*

$\tau(n)$, Osztószám – függvény

➤ Az $n \geq 1$ természetes szám pozitív osztóinak száma.

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i) = \sum_{d|n} 1$$

$$\tau(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k) \Rightarrow \tau(p^\alpha) = \alpha + 1 \quad p \in P$$

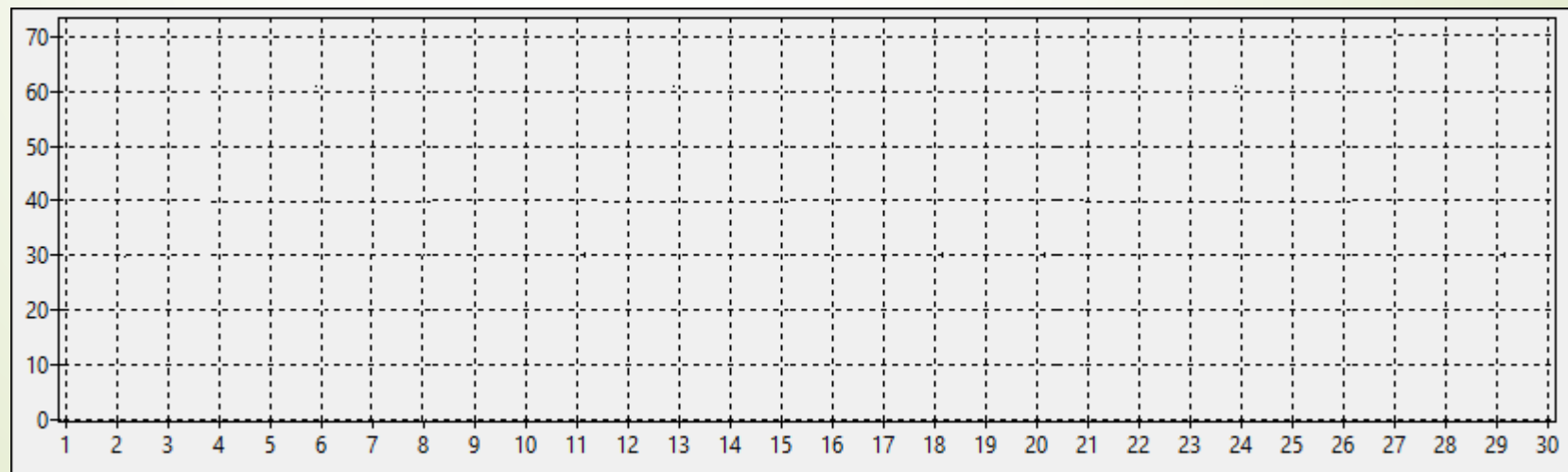


$\sigma(n)$, Osztóösszeg – függvény

➤ Az $n \geq 1$ természetes szám összes pozitív osztóinak összege.

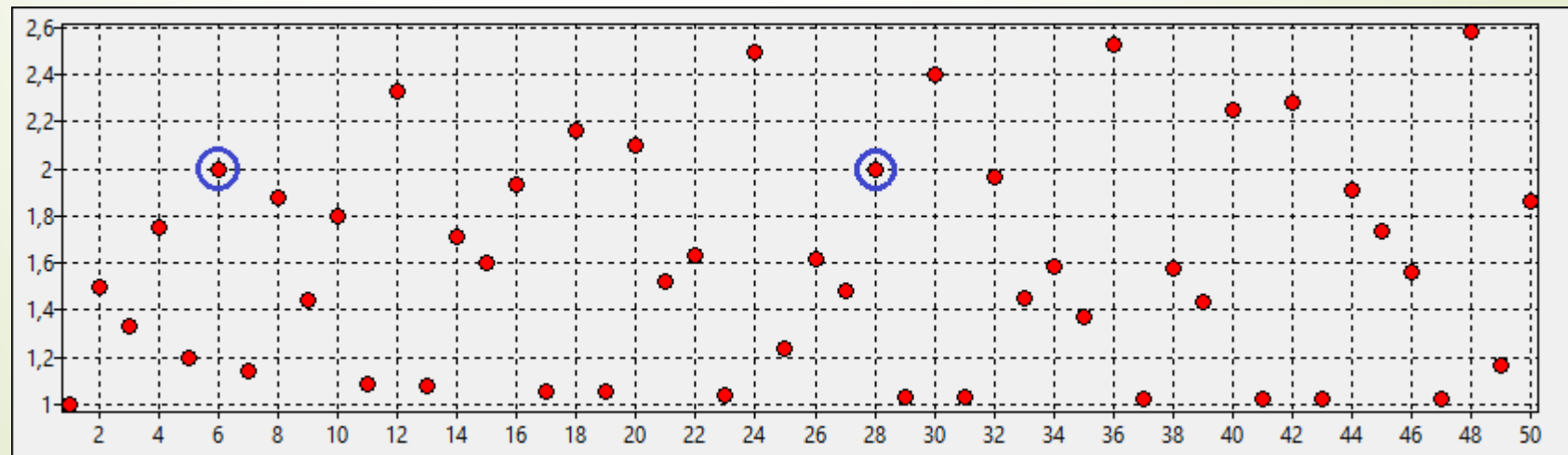
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{p^\alpha | n} \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} = \sum_{d|n} d$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} * \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} * \dots * \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \Rightarrow \sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \quad p \in P$$



$\frac{\sigma(n)}{n}$ és a tökéletes számok

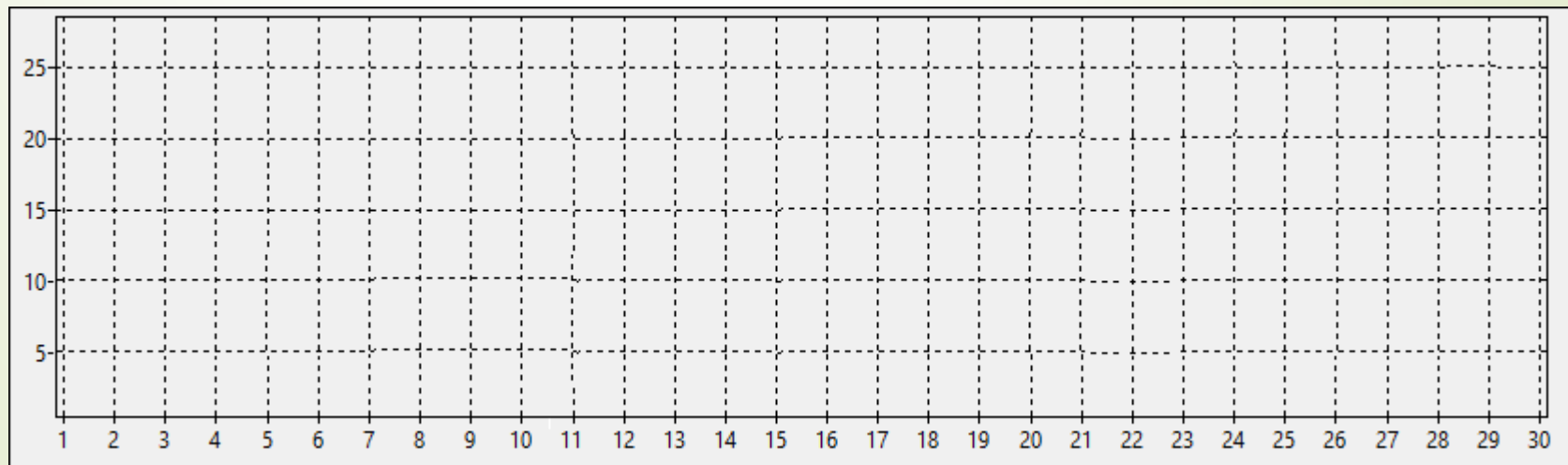
- $\frac{\sigma(n)}{n} < 2 \Rightarrow$ Azokat a számokat, ahol az osztóösszeg kisebb a szám kétszeresénél, *hiányos* számoknak nevezzük.
- $\frac{\sigma(n)}{n} > 2 \Rightarrow$ Azokat a számokat, ahol az osztóösszeg nagyobb a szám kétszeresénél, *bővelkedő* számoknak nevezzük.
- $\frac{\sigma(n)}{n} = 2 \Rightarrow$ Azokat a számokat, melyeken a szigmafüggvény értéként pontosan a szám kétszeresét veszi fel, **tökéletes** számoknak nevezzük.



$\varphi(n)$, Euler – függvény

- Az $1, 2, \dots, n$ sorozatból azon tagok száma, amelyek relatív prímek az n -hez képest.

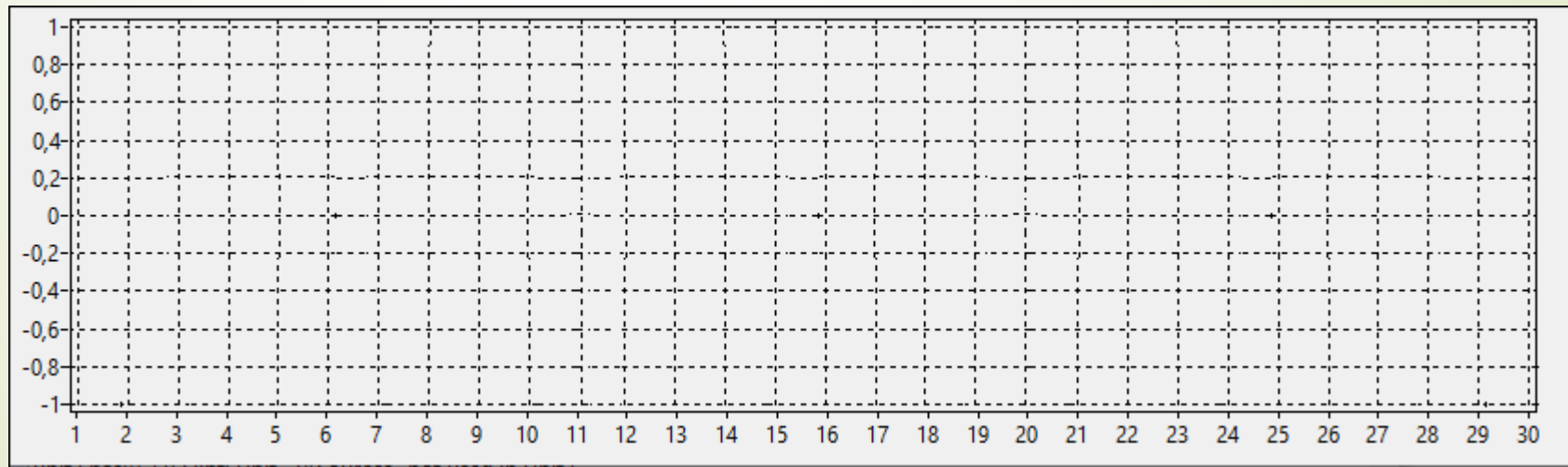
$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$
$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) * (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) * \dots * (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) \Rightarrow$$
$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \quad p \in P$$



$\mu(n)$, Möbius – függvény

➤ Az alábbi értékeket veheti fel:

- $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$
- $\mu(1) = 1$
- $\mu(n) = 0$, Ha $\exists p \in P$ ahol $p^2 | n$, tehát ha n osztható négyzettel
- $\mu(n) = 0$, Ha n négyzetmentes és $n = p_1 * p_2 * \dots * p_k$, tehát ha páros prímosztója van n -nek, akkor $\mu(n) = 1$. Ha pedig páratlan prímosztója van n -nek, akkor $\mu(n) = (-1)^k$





Legkisebb négyzetek módszere

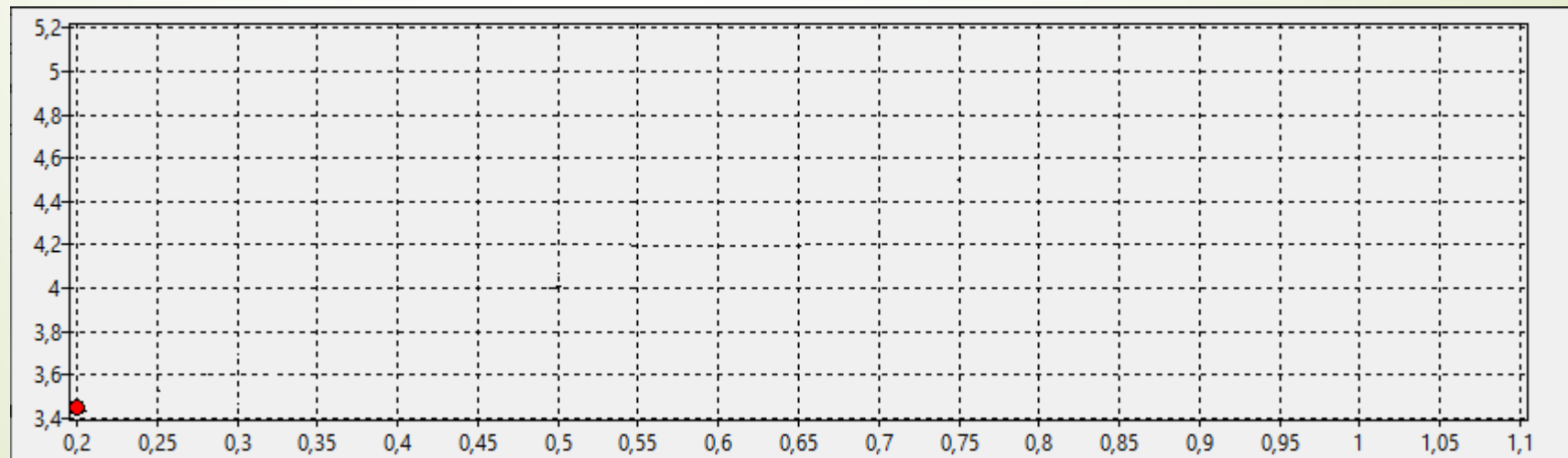
A legkisebb négyzetek módszere

- Mérési eredmények kiértékelésére szolgál.
- A módszer annak a görbének az alakját keresi, amely a legjobban illeszkedik a mérés során meghatározott n pontokhoz.
- A görbe együtthatókból áll, így a feladat meghatározni az együtthatókat.
- A neve abból ered, hogy a mért és a görbe által visszaadott értékek különbségének a négyzetösszegét próbálja minimalizálni.
- Alkalmazási lehetőségek:
 - **Lineáris:** $y = a * x + b$
 - **Polinomiális:** $p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$
 - **Logaritmikus:** $y_i = a * \ln(x_i) + b$
 - **Hatvány:** $y_i = a * x_i^b$
 - **Exponenciális:** $y_i = a * e^{x_i*b}$

Lineáris eset ábrázolása

- Ennél az esetnél keressük az approximációs egyenletet $y = a * x + b$ lineáris alakban, ahol

$$a = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \quad \text{és} \quad b = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$



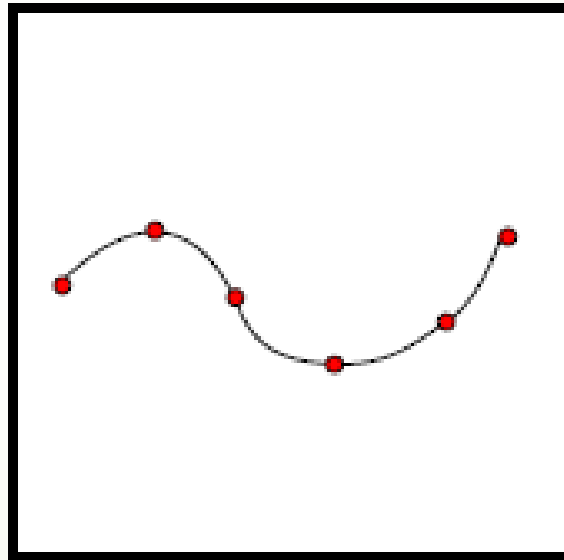


Grafikában alkalmazott görbék

Interpolációs és approximációs görbék

Interpolációs görbék

- Azon görbék képe, melyek adott pontokra illeszkednek



Hermite ívek

- Gyakran alkalmazott interpolációs görbe
- Képét két fő pont (P_0 és P_1), valamint két érintővektor (V_0 és V_1) adja meg
- A göbe pontjait a következő egyenlet határozza meg:

$$H(t) = P_0F_0(t) + P_1F_1(t) + V_0F_2(t) + V_1F_3(t)$$

ahol:

$$F_0(t) = (1 - t)^2 * (1 + 2t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

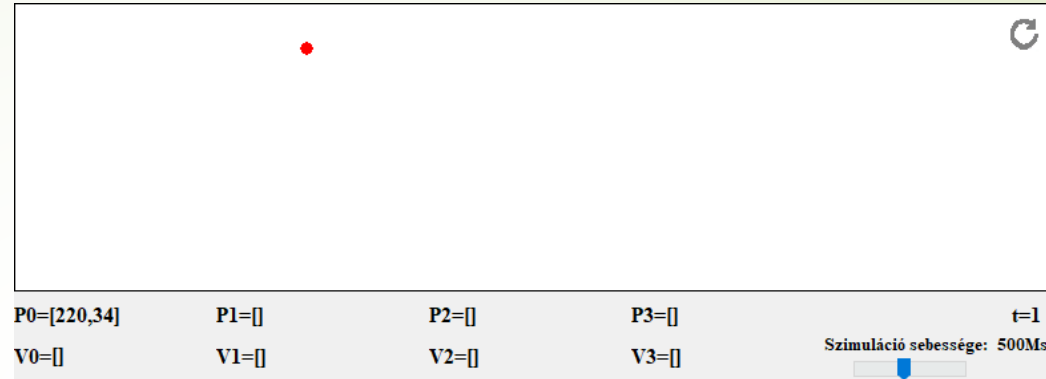
$$F_1(t) = t * (1 - t)^2 = t^3 - 2t^2 + t$$

$$F_2(t) = -t^2 * (1 - t) = t^3 - t^2$$

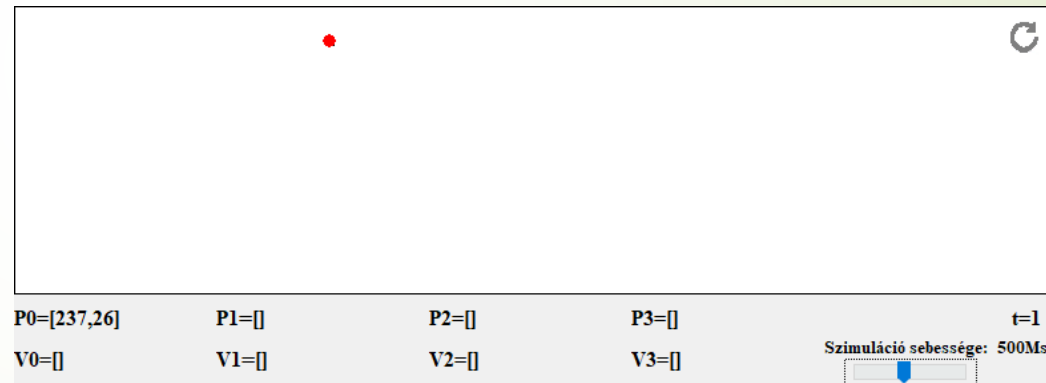
$$F_3(t) = (3 - 2t) * t^2 = 3t^2 - 2t^3$$

Hermite-görbe grafikus ábrázolása

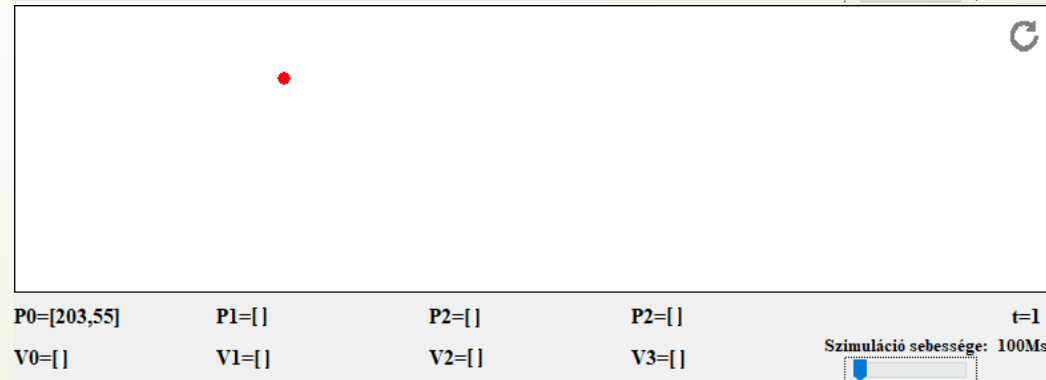
Elsőfokú Hermite-görbe



Másodfokú Hermite-görbe

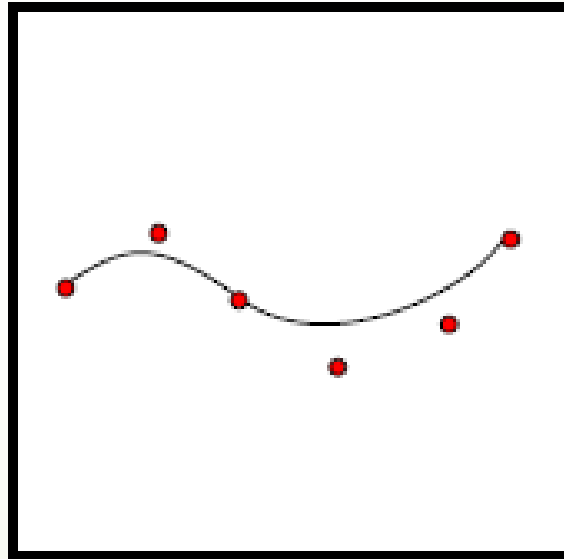


Harmadfokú Hermite-görbe



Approximációs görbék

- Azon görbék képe, melyek adott pontokhoz bár közelítenek, de nem garantált, hogy át is haladnak azokon.



Bézier-görbe

- A legelterjedtebb approximációs görbe
- Típusától függően a görbe képét pontok határozzák meg
- Legelterjedtebb megadási módja harmadfokú polinomok alkalmazása, P_0 , P_1 , P_2 és P_3 pontok segítségével, ahol P_0 a görbe kiindulási, P_3 pedig az érkezési pont. P_1 és P_2 pontotokat csak közelíti a görbe.
- A harmadfokú Bézier polinomok a következő alakban írhatóak fel:

$$B_0(t) = (1 - t)^3$$

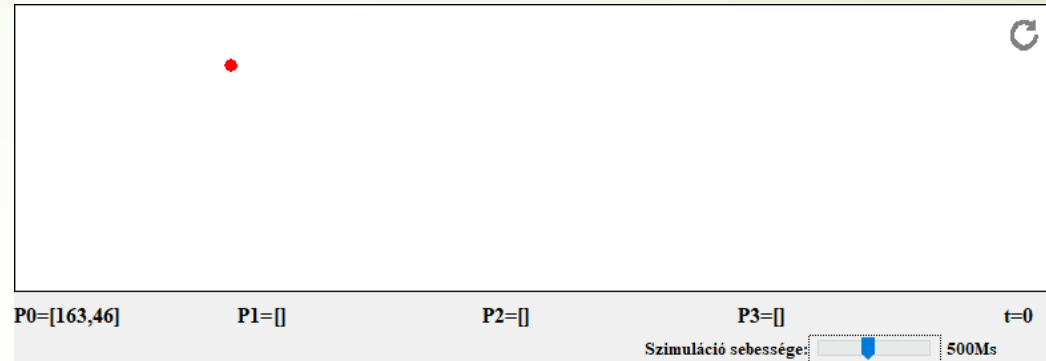
$$B_1(t) = 3t(1 - t)^2$$

$$B_2(t) = 3t^2(1 - t)$$

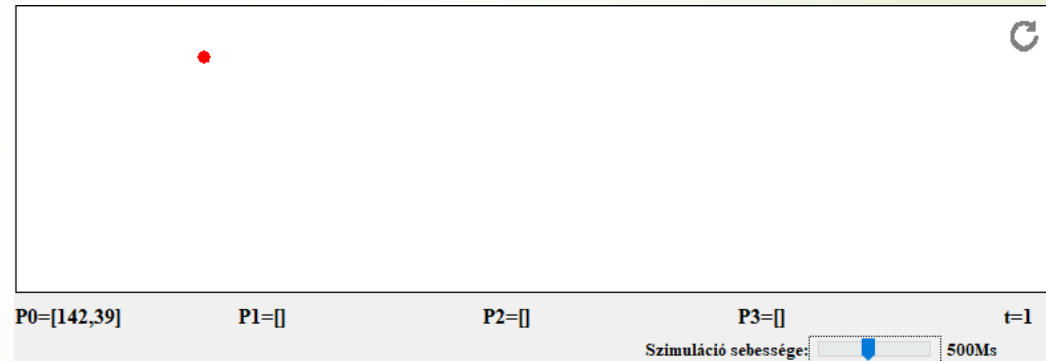
$$B_3(t) = t^3$$

Bézier-görbék grafikus ábrázolása

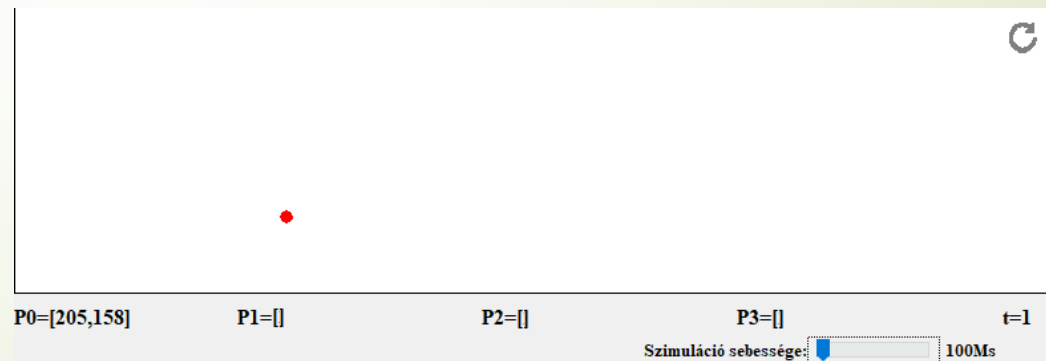
Lineáris Bézier-görbe



Másodfokú Bézier-görbe



Harmadfokú Bézier-görbe



Felhasznált irodalom

- Caliskan, K. (20. Marec 2020). *Computer Animation*.
Elérhetőség: keremcaliskan.com: <http://www.keremcaliskan.com/a-tutorial-on-computer-animation-ii-2/>
- Farkas, M. (2011). *Nevezetes számelméleti függvényekről*. Budapest: Eötvös Loránd Tudományegyetem.
- Imre Juhász, S. L. (2007). *Számítógépi grafika*. Miskolc: Miskolci Egyetem.
- Internet - Wikipedia. (Ápríl 2019). *Osztóösszeg-függvény*.
Elérhetőség: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Oszt%C3%B3%C3%B6sszegf%C3%B6ggv%C3%A9ny>
- Internet - Matekarcok. (15. Marec 2020). *Matekarcok*.
Elérhetőség: <https://matekarcok.hu/kategoria/matektemakorok/fuggvenyek/elemi-fuggvenyek/>



Felhasznált irodalom

- Jiří Žára, B. B. (2004). *Moderní počítačová grafika*. Brno: Computer press. ISBN 80-251-0454-0
- Takáč, O. (2016). *A számítógépes grafika*. Komárno: Univerzita J. Selyeho. ISBN 978-80-8122-182-8
- Takáč, O. (2017). *Modellezés és szimuláció*. Komárno: Univerzita J. Selyeho. ISBN 978-80-8122-203-0
- Tóth, J. (Marec 2019). *Számelmélet szeminárium. Seminár*. Komárno, Slovensko.



Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

Bc. Norbert Annuš
2020